Μάθημα 1ο

3/3/17

Έστω A, B σύνολα $\neq \emptyset$

$A \times B = \{(\alpha, b) \mid \alpha \in A, b \in B\}$ έχει σημασία η σειρά είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$A = \{1, 2\}$, $B = \{\Pi, +, ☺\}$ $|A \times B| = $ πλήθος $= 6$.

Αντίστοιχα ορίζεται το $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ για k σύνολα

Αν έχουμε άπειρα σύνολα $A_1, A_2, \dots$

$A_1 \times A_2 \times \dots = \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i = \{$ ακολουθίες $(\alpha_i) \mid \alpha_i \in A_i\}$

π.χ. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{R}^{\infty}$.

Σχέσεις σε σύνολα

Μια διμελής σχέση R(relation) στο $A \times B$ είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$. $R \subseteq A \times B$

Γράφουμε xRy αν $(x, y) \in R$

x σχετίζεται μέσω R με το y.

π.χ. $A = \{1, 2\}$, $B = \{\Pi, +, ☺\}$ $R = \{(2, ☺), (2, \Pi)\} \subseteq A \times B$

Σχέση ισοδυναμίας στο A=B

$R \subseteq A \times A$ Όταν πληρούνται 3 ιδιότητες: ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική

1) ανακλαστική: $\forall \alpha \in A \Rightarrow \alpha R \alpha$ (το απαιτεί να ισχύει)

2) Συμμετρική: Αν $\alpha R b \Rightarrow b R \alpha$ (όχι απαραίτητο)

3) Μεταβατική: Αν $\alpha R b$ και $b R \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma$

π.χ. $A = \{$φοιτητές του Μαθημ.$\}$ R: $\alpha R b$ αν α και b έχουν περάσει τον ίδιο αριθμό μαθημάτων.

απάντηση

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) ανακλαστική: προφανής} \\ \text{2) συμμετρική: προφανής} \\ \text{3) μεταβατική: προφανής} \end{array}\right\} \Rightarrow R \text{ είναι σχέση ισοδυναμίας}$$

Πράξεις

Ορισμός: Μια πράξη ⊙ στο σύνολο A είναι μια απεικόνιση $\odot : A \times A \to A$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \odot \beta$$

π.χ. $A = \{☺, □\}$ $\odot \{☺, □\} \times \{☺, □\} \to \{☺, □\}$

$\{(☺, ☺), (☺, □), (□, ☺), (□, □)\}$

$\downarrow \odot$ □, ☺, ☺, □

π.χ. $\mathbb{N}$ με $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \mapsto n+m$

$- : \cancel{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}}$ $(n, m) \mapsto n-m$ όχι καλά ορισμένη

$A = \{1, 2\}$ $\cancel{+ : A \times A \to A}$ $(i, j) \mapsto i+j$

$(1, 2) \mapsto 3 \notin A$.

Προσοχή! στην "πράξη"

Πιθανόν να έχεις φτιάξει από μια πράξη.

1) Μια πράξη είναι προσεταιριστική (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά), αν $(\alpha \odot \beta) \odot \gamma = \alpha \odot (\beta \odot \gamma)$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$.

2) Μια ιδιότητα καλείται αντιμεταθετική (ή Αβελιανή) αν $\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha$ $\forall \alpha, \beta \in A$.

3) Υπάρχει ουδέτερο ή μοναδιαίο στοιχείο $e \in A$ ώστε $\alpha \odot e = e \odot \alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in A$

4) Όταν υπάρχει το ουδέτερο-μοναδιαίο, τότε θα λέμε ότι η πράξη μας έχει αντίθετο-αντίστροφο, αν $\forall \alpha \in A$ $\exists \beta \in A$ με $\alpha \odot \beta = e = \beta \odot \alpha$

Ορισμός. Έστω μια πράξη $\odot$ ορισμένη στο σύνολο A

1) Το ζεύγος $(A, \odot)$ θα καλείται ημιομάδα, αν η πράξη είναι προσεταιριστική.

2) Το ζεύγος $(A, \odot)$ θα καλείται μονοειδές, αν είναι ημιομάδα και υπάρχει ουδέτερο - μοναδιαίο στοιχείο

3) Το ζεύγος $(A, \odot)$ θα καλείται ομάδα, αν είναι μονοειδές και $\forall a \in A$ υπάρχει ~~..~~ αντίθετο - αντίστροφο.

4) Αν επιπλέον η πράξη είναι αβελιανή, τότε θα καλείται αβελιανή ομάδα.

π.χ.

1) Η αφαίρεση στο $\mathbb{N}$ δεν ορίζεται

2) Στο $\mathbb{Z}$ ορίζεται αλλά δεν είναι αβελιανή $1-3 \neq 3-1$

3) Η αφαίρεση στο $\mathbb{Z}$ δεν είναι προσεταιριστική

$$\underbrace{(1-2)-3}_{4} \neq \underbrace{1-(2-3)}_{0}$$

4) $M(n\times n, \mathbb{R}) = \{ n\times n$ πίνακες με πραγματικά στοιχεία$\}$

Η πρόσθεση των πινάκων στο $M(n\times n, \mathbb{R})$ είναι καλά ορισμένη. Είναι προσεταιριστική γιατί η πρόσθεση στο $\mathbb{R}$ είναι προσεταιριστική. Ημιομάδα.

Ο μηδενικός πίνακας είναι το ουδέτερο στοιχείο. Είναι μονοειδές

$\forall A \in M(n\times n, \mathbb{R}) \Rightarrow -A \in M(n\times n, \mathbb{R})$. Άρα το $(M(n\times n, \mathbb{R}), +)$ αποτελεί ομάδα και μάλιστα αβελιανή.

Ο πολ/μος των πινάκων στο $M(n\times n, \mathbb{R})$ είναι καλά ορισμένος. Επίσης είναι προσεταιριστικός. Ο ταυτοτικός - -μοναδιαίος πίνακας αποτελεί μοναδιαίο στοιχείο για τον πολ/μο. $A \cdot I = I \cdot A = A \quad \forall A \in M(n\times n, \mathbb{R})$

και $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(n\times n, \mathbb{R})$

$(M(n\times n, \mathbb{R}), \cdot)$ αποτελεί μονοειδές

Δεν είναι ομάδα (δεν υπάρχει πάντα ο αντίστροφος)

Αν $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists$ ο αντίστροφος του A, A^{-1}

Ορίζουμε το σύνολο $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n\times n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

γενική γραμμική ομάδα.

Το $(GL(n,\mathbb{R}), \cdot)$ αποτελεί ομάδα, όχι αβελιανή.

Το $(GL(n,\mathbb{R}), +)$ δεν είναι καλά ορισμένο.

$A + (-A) = O_{n\times n} \notin GL(n,\mathbb{R})$

π.χ.

- Έστω S σύνολο $S \neq \varnothing$. $\underbrace{\mathcal{P}(S)}_{\text{δυναμοσύνολο}} = \{A \subseteq S\}$ το σύνολο όλων τω υποσυνόλων

$\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ είναι καλά ορισμένη

$(A, B) \mapsto A \cap B$ γιατί $A \cap B \subseteq S$.

$(\mathcal{P}(S), \cap)$ ημιομάδα

- Το $S \in \mathcal{P}(S)$ έχει την ιδιότητα $S \cap A = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(S)$

$(\mathcal{P}(S), \cap)$ μονοειδές

Δεν είναι ομάδα

- Στο $\mathbb{Z}$ η πράξη $\alpha \odot b = 2(\alpha + b)$

θέλω να είναι καλά ορισμένη δλδ. αν ο αριθμός που θα πάρω να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

Είναι καλά ορισμένη.

$(\alpha \odot b) \odot c = (2(\alpha+b)) \odot c = 2[(2(\alpha+b)) + c] =$
$= 4\alpha + 4b + 2c$

$\neq$

$\alpha \odot (b \odot c) = \alpha \odot [2(b+c)] = 2[\alpha + 2(b+c)] =$
$= 2\alpha + 4b + 4c$

Άρα δεν είναι προσεταιριστική

Είναι αντιμεταθετική